mit $\varphi$ als Phasenwinkel, da nicht zu erwarten ist, dass sich die reelle Ausgangsgröße $y(t)$ als einfache Cosinus-Funktion ergibt. Die notwendigen Ableitungen nach der Zeit sind durch

$$\underline{y}^{(n)}(t) = (j\omega)^n \cdot Y \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} \tag{3.90}$$

gegeben.

Berücksichtigt man, dass

$$e^{j(\omega t+\varphi)} = e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} \quad , \tag{3.91}$$

so erhält man nach Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} Y \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \cdot (a_n(j\omega)^n + \ldots + a_0) \\ = U \cdot e^{j\omega t} \cdot (b_0 + \ldots + b_m(j\omega)^m) \quad . \end{aligned} \tag{3.92}$$

Man erkennt, dass der Ansatz die Gleichung erfüllt. Der Term $e^{j\omega t}$ kann eliminiert werden, sodass man aus der Differentialgleichung eine komplexe zeitunabhängige Gleichung für $Y$ und $\varphi$ erhält.

$$Y \cdot e^{j\varphi} = U \cdot \frac{b_0 + b_1 j\omega + \ldots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1 j\omega + \ldots + a_n(j\omega)^n} = U \cdot G(j\omega) \tag{3.93}$$

Der dabei gewonnene gebrochen rationale Ausdruck in $(j\omega)$ wird Frequenzgang genannt. Man kann die in der Gl.(3.93) auftretenden Variablen $U$ und $Y \cdot e^{j\varphi}$ als Zeiger deuten, die Amplitude und Phasenlage harmonischer Größen bekannter Frequenz darstellen. Solche Zeiger sind komplexe Zahlen. Im vorliegenden Fall (Bild 3-7) ist

$$\underline{u} = U \tag{3.94}$$

der (reelle) Zeiger der Eingangsgröße $u(t)$ und

$$\underline{y} = Ye^{j\varphi} \tag{3.95}$$

der (komplexe) Zeiger der Ausgangsgröße $y(t)$.

Der Frequenzgang ist demnach ein komplexer Übertragungsfaktor, der nur von der Frequenz abhängt und der die Zeiger der (harmonischen) Ein- und Ausgangsgrößen multiplikativ verknüpft.

$$\underline{y} = G(j\omega) \cdot \underline{u} \tag{3.96}$$

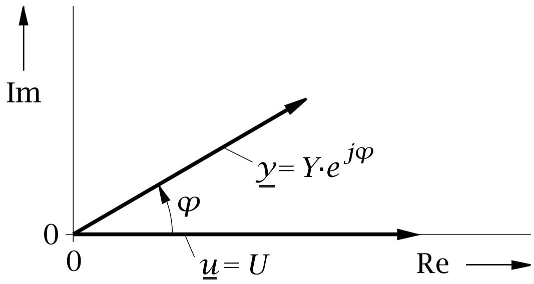


Bild 3-7: Zeiger

Mit dieser Festlegung erhält man als Definition des Frequenzganges

$$\begin{aligned} \text{Frequenzgang} &= \frac{\text{Zeiger der harmonischen Ausgangsgröße}}{\text{Zeiger der harmonischen Eingangsgröße}} \\ G(j\omega) &= \frac{\underline{y}}{\underline{u}} \quad . \end{aligned} \tag{3.97}$$

Der Frequenzgang eines Übertragungsgliedes bzw. der zu einer Differentialgleichung

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u + b_1 \dot{u} + \ldots + b_m u^{(m)} \tag{3.98}$$

gehörende Frequenzgang enthält die gleichen Koeffizienten wie die Differentialgleichung, nämlich

$$G(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega + \ldots + b_m (j\omega)^m}{a_0 + a_1 j\omega + \ldots + a_n (j\omega)^n} \tag{3.99}$$

und ist der Quotient zweier Polynome in $(j\omega)$. Wegen des zuletzt genannten Umstandes hat es sich eingebürgert, den Frequenzgang als Funktion von $j\omega$ zu schreiben, obgleich er eine (komplexe) Funktion der reellen Frequenz $\omega$ ist.

Durch Vergleich mit Abschnitt 3.7 erkennt man, dass die dort eingeführte Übertragungsfunktion und der oben angegebene Frequenzgang sich nur hinsichtlich ihrer Argumente unterscheiden. Der Unterschied zwischen beiden ist jedoch mehr als nur formaler Art.

Als Beispiel für das Arbeiten mit Frequenzgängen soll die Bewegung des Wagenkastens eines gefederten Einachsfahrzeuges auf welliger Fahrbahn nach Bild 3-8 untersucht werden.