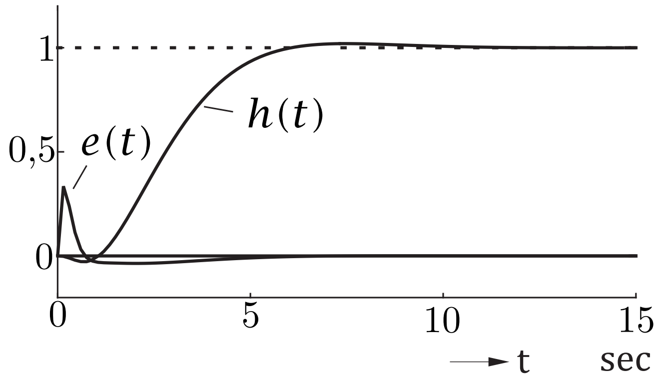

Bild 5-35: Sprungantworten der Flugzeugregelung

5.7 Closed Loop Shaping

Beim Open Loop Shaping wird der aufgeschnittene Regelkreis $G_0(s) = G_S(s)G_R(s)$ so festgelegt, dass der durch $S(s)$ und $T(s)$ repräsentierte geschlossene Regelkreis die gewünschten Eigenschaften besitzt. Die resultierenden Anforderungen an $G_0(s)$ können über Gl.(5.82) und Gl.(5.84) aus Abschätzungen der Anforderungen an die Frequenzgänge des geschlossenen Regelkreises ermittelt werden. Für eine gegebene Regelstrecke $G_S(s)$ wird der Regler $G_R(s)$ dann so angepasst, dass sich das gewünschte $G_0(s)$ ergibt. Das Open Loop Shaping adressiert folglich die Anforderungen nicht direkt, sondern nur über den Umweg des offenen Regelkreises. Dies hat den gewichtigen Vorteil, dass die Berechnung des Reglers $G_R(s)$ mit sehr einfachen Mitteln wie einer grafischen Subtraktion von $G_0(s)$ und $G_S(s)$ im Bode-Diagramm durchgeführt werden kann. Ein entscheidender Nachteil ist jedoch, dass durch den Umweg über $G_0(s)$, der auch Abschätzungen enthält, Reserven und Leistungsfähigkeit des Reglers verloren gehen.

Anders als beim Open Loop Shaping, werden daher beim Closed Loop Shaping direkt die Frequenzgänge des geschlossenen Regelkreises behandelt. Für eine gegebene Strecke $G_S(s)$ wird direkt ein Regler $G_R(s)$ synthetisiert, der die Anforderungen an die Frequenzgänge des geschlossenen Regelkreises erfüllt. Aufgrund des stark nichtlinearen Zusammenhangs von $G_R(s)$ und dem geschlossenen Regelkreis kann dabei die Berechnung der Reglers nur noch mit Computerunterstützung erfolgen.

Die Beziehungen der einzelnen Eingangsgrößen in Bild 5-30 auf den Regelfehler $x - w$ können der Gl. (5.77) entnommen werden. Hieraus ergibt sich, dass für einen geringen Einfluss der Störgröße z auf die Regelgröße x eine möglichst kleine Amplitude von $S(j\omega)$ über alle Frequenzen erstrebenswert ist. Unter der Annahme, dass das Führungsverhalten anderweitig eingestellt werden kann (siehe Abschnitt 7.7) wäre es das erklärte Ziel der Regelung, Störungen möglichst gut zu unterdrücken und folglich den Betrag $|S(j\omega)|$ über alle ω zu minimieren. Ein skalares Maß für die Güte einer Regelung stellt somit die sogenannte $\mathcal{H}_\infty$-Norm dar die bei einer stabilen Übertragungsfunktion der betragsmäßig größten Verstärkung über alle Frequenzen entspricht:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|. \tag{5.88}$$

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|. \tag{5.89}$$

Die Minimierung von $\|S\|_\infty$ scheint insofern ein geeignetes Regelziel zu sein. Eine Minimierung ist auch insofern sinnvoll, als das eine Lösung $\|S\|_\infty = 0$ nicht erwartet werden kann, da dies $|G_0(j\omega)| = \infty$ für alle Frequenzen implizieren würde. Tatsächlich ist die Form des Amplitudengangs der Sensitivitätsfunktion nicht beliebig wählbar. Zum einen zeigt der Zusammenhang zwischen $S(s)$ und $T(s)$ in Gl. (5.75), dass Führungs- und Störgrößenverhalten nicht unabhängig voneinander eingestellt werden können. Eine weitere fundamentale Einschränkung ist das Bode Sensitivitäts-Integral, das auf den sogenannten Wasserbetteffekt führt.

Sei $G_0(s)$ der aufgeschnittene Regelkreis mit N_p Polstellen p_i in der rechten s-Halbebene. Dann lässt sich mathematisch nachweisen, dass für die Sensitivitätsfunktion S des geschlossenen Regelkreises

$$\int_0^\infty \lg |S(j\omega)|\, \mathrm{d}\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{N_p} \mathrm{Re}(p_i) - \frac{\pi}{2} \lim_{s\to\infty} sG_0(s) \tag{5.90}$$

gilt. Besitzt $G_0(s)$ mindestens zwei Polstellen mehr als Nullstellen, so vereinfacht sich dies mithilfe der Grenzwertsätze zu

$$\int_0^\infty \lg |S(j\omega)| \, \mathrm{d}\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{N_p} \mathrm{Re}(p_i) \tag{5.91}$$

Ist $G_0(s)$ ferner stabil oder integrierend, so vereinfacht sich die Gleichung weiter zu

$$\int_0^\infty \lg |S(j\omega)| \, \mathrm{d}\omega = 0 \tag{5.92}$$

Die anschauliche Interpretation von Gl.(5.92) ist, dass die Amplitude der Sensitivitätsfunktion nicht über den ganzen Frequenzbereich klein gezwungen werden kann. Das Erreichen einer Verbesserung, d.h. Unterdrückung von $|S(j\omega)|$ in einem Frequenzbereich, wird durch eine gleichwertige Verschlechterung in einem anderen Frequenzbereich ausgeglichen, siehe Bild 5-36. Daher hat sich die Bezeichnung als Wasserbetteffekt für dieses Phänomen eingebürgert. Anschaulich halten sich die Abschwächung und Verstärkung von Störungen die Waage und können nur in andere Frequenzbereiche verlagert werden. Hier ist zu beachten, dass die Flächen in Bild 5-36 aufgrund der logarithmischen Skalierung der Frequenzachse nicht gleich groß erscheinen, bei einer linearen Skalierung aber identisch sind. Eine weitere Analyse von Gl.(5.90) und Gl.(5.91) zeigt, dass die Störunterdrückung für instabile Systeme offensichtlich schwerer zu bewerkstelligen ist, während Systeme mit nur einer Polstelle mehr als Nullstellen diese Aufgabe erleichtern, da auf der rechten Gleichungsseite entsprechend positive bzw. negative Ausdrücke erscheinen.

Da folglich die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises nicht über den gesamten Frequenzbereich betragsmäßig klein sein können, bietet sich die Formulierung von frequenzabhängigen Anforderungen an. Typische Anforderungen an $S(j\omega)$ schließen folgende Aspekte ein:

1. Größter Betrag von $S(j\omega)$ über alle Frequenzen: $\sup_{\omega} |S(j\omega)| \leq M$

2. Begrenzung des stationären Regelfehlers

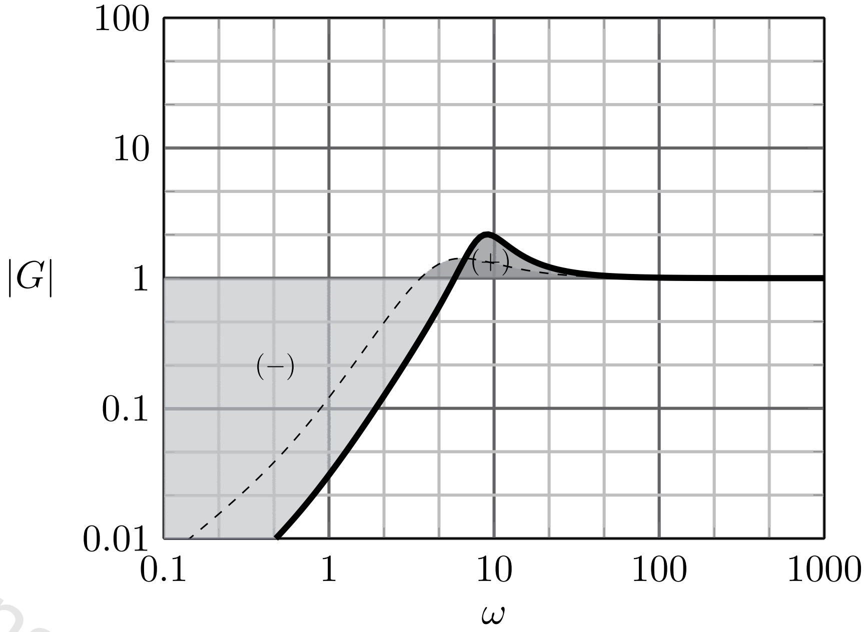

Bild 5-36: Amplitudengang einer Sensitiviätsfunktion mit Kennzeichnung positiver (+) und negativer (−) Beiträge zum Sensitiviätsintegral

3. Einstellen einer gewünschten minimalen Bandbreite ω_B
4. Verlauf von $S(j\omega)$ in ausgewählten Frequenzbereichen

Ein möglicher Verlauf der Sensitivitätsfunktion ist in Bild 5-37 abgebildet und die entscheidenden Größen für die ersten drei Aspekte markiert. Der Abbildung kann entnommen werden, dass die beschriebenen Anforderungen in Form eines frequenzabhängigen Betragsverlaufs dargestellt werden können, den der Betrag von $S(j\omega)$ über alle Frequenzen nicht überschreiten darf. Dies wird mathematisch mithilfe einer Gewichtsfunktion $W(j\omega)$ im Allgemeinen wie folgt ausgedrückt:

$$|S(j\omega)| \leq \frac{1}{|W(j\omega)|} \quad \forall \omega \quad \Rightarrow \quad \|W(j\omega) \cdot S(j\omega)\|_\infty \leq 1 \tag{5.93}$$

Ist die Gewichtsfunktion $W(j\omega)$ eine Konstante, so wird angestrebt, dass die Amplitude von $S(j\omega)$ gleichmäßig über alle Frequenzen kleiner als der Kehrwert dieser Konstanten ist. Ist $W(j\omega)$ eine Funktion wie in Bild 5-37, so wird angefordert, dass $|S(j\omega)|$ diese frequenzvariable Form nicht überschreitet. Alternativ zur Überschreitung von $1/|W(j\omega)|$

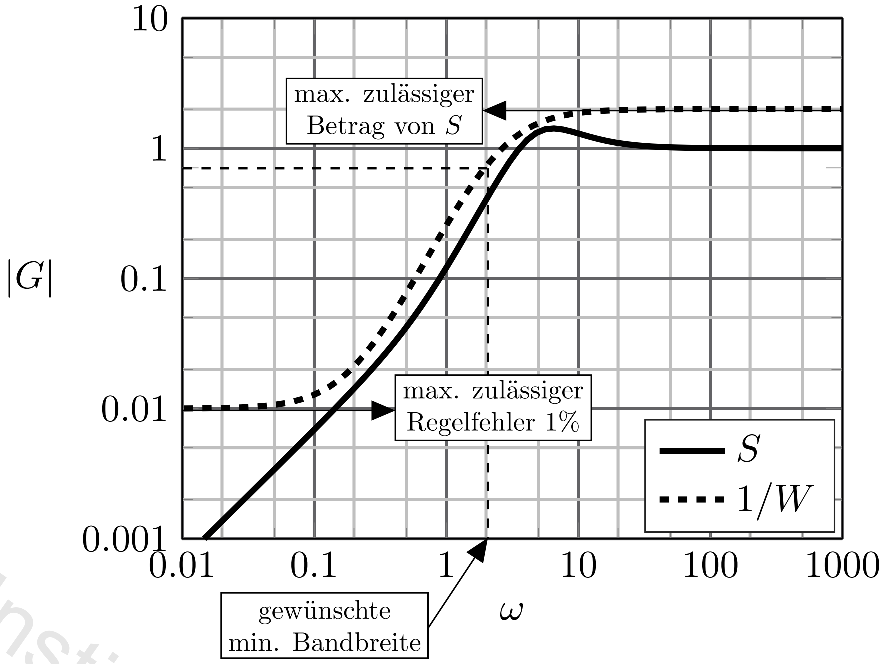

Bild 5-37: Amplitudengang einer Sensitivitätsfunktion S, die die durch die Gewichtsfunktion W definierten Anforderungen erfüllt.

kann $|W(j\omega)|$ als frequenzabhängige Gewichtung interpretiert werden, wobei hohe Werte von $|W(j\omega)|$ anzeigen, das es wichtiger ist, die Sensitivität für diese Frequenzen zu verringern als in Frequenzbereichen, wo $|W(j\omega)|$ kleine Werte annimmt.

Die aufgestellte Bedingung in Gl.(5.93) kann als ein Optimierungsproblem formuliert werden, welches mit entsprechenden Algorithmen effizient gelöst werden kann. Um die Sensitivität dabei möglichst hin zu kleinen Beträgen zu verschieben, wird dazu die Gleichung

$$\min_{\gamma} ||S(j\omega) \cdot W(j\omega)||_{\infty} \leq \gamma \qquad (5.94)$$

nach γ minimiert, was auch als γ-Iteration bezeichnet wird. Hierbei gibt man sich gegebenenfalls auch mit einem suboptimalen Regler zufrieden, der die Bedingung nicht für das minimale γ aber ein hinreichend kleines zufriedenstellend löst. Da bei diesem Vorgehen die Sensitivität gewichtet wird, spricht man auch vom Verfahren der Weighted Sensitvity. Die gewonnenen Lösungen liefern dabei oftmals Regler hoher Ordnung, da die Reglerordnung der Summe der Ordnung der Regelstrecke und der Ordnung der Gewichtsfunktion entspricht, was bei der Implementierung dieser Regler nachteilig sein kann.