und für den Beobachter

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{C}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u}) \quad . \tag{8.91}$$

Subtrahiert man Gl.(8.91) von Gl.(8.90), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} &= \boldsymbol{A}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}} \quad . \end{aligned} \tag{8.92}$$

Mit

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{C} \tag{8.93}$$

geht Gl.(8.92) über in die (homogene) Gleichung

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{F}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{8.94}$$

und hat damit als Lösung

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = e^{\boldsymbol{F}\cdot t}\cdot\tilde{\boldsymbol{x}}(0) \quad . \tag{8.95}$$

Wenn also die Matrix $\boldsymbol{F}$ so gewählt wird, dass der durch Gl.(8.95) beschriebene Einschwingvorgang stabil ist und genügend rasch abläuft, und danach die Matrix $\boldsymbol{L}$ gemäß Gl.(8.93) dimensioniert wird, nähert der Zustandsvektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ des Beobachters den Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$ des Systems mit wachsender Zeit immer besser an, auch wenn die Anfangszustände von System und Beobachter voneinander verschieden waren und auch wenn die Eingangsgrößen $\boldsymbol{u}$ sich beliebig ändern.

8.7 Minimale Realisierung

Durch die Ausführungen zum Entwurf von Beobachter und Zustandsrückführung ist klar geworden, dass Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zentrale Eigenschaften für einen erfolgreichen Entwurf eines Reglers im Zustandsraum sind. Es lässt sich jedoch nachweisen, dass, wenn diese Eigenschaften nicht vorliegen, es möglich ist, ein Zustandsraummodell geringerer Dimension abzuleiten, welches diese Eigenschaften erfüllt und ein identisches Ein-Ausgangsverhalten aufweist. Der mathematische Hintergrund hierfür kann bei Systemen mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße so verstanden werden, dass fehlende Beobachtbarkeit und/oder Steuerbarkeit zu einer Pol-Nullstellen-Kürzung in der

Übertragungsfunktion $G(s)$ führt. Wird diese Kürzung vorgenommen, so verringert sich die Nennerordnung von $G(s)$, was bei einer Realisierung der Übertragungsfunktion als Zustandsraummodell (beispielsweise mithilfe der Regelungsnormalform) zu einer Reduktion der ursprünglichen Dimension des Zustandsraums entspricht, da die Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ den Polstellen von $G(s)$ entsprechen.

Folglich ist es also möglich, zu einem gegebenen $G(s)$ Zustandsraummodelle verschiedener Dimension zu erzeugen, die dasselbe System beschreiben, indem man zunächst $G(s)$ in Zähler und Nenner um Polstellen und Nullstellen an derselben Position erweitert. Die daraus entstehenden Zustandsraummodelle sind dann aber nicht steuer- und/oder beobachtbar. Zustandsraummodelle, die aus einer vollständig gekürzten Übertragungsfunktion erwachsen, besitzen daher die minimale Anzahl an notwendigen Zuständen und werden daher auch minimale Realisierung genannt. Dieses Vorgehen soll an einem kurzen Beispiel erläutert werden.

Für die beiden Zustandsraummodelle

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{8.96}$$

und

$$\dot{x} = -x + u \quad , \quad y = x \tag{8.97}$$

berechnet sich gemäß Gl.(8.60) im zweiten Fall die Übertragungsfunktion zu $G(s) = \frac{1}{s+1}$, während sich im ersten Fall die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{2s+1}{(2s+1)(s+1)}$ ergibt. Offensichtlich liegt hier eine Pol-Nullstellen-Kürzung vor. Zudem rechnet man schnell nach, dass Gl.(8.96) weder steuerbar noch beobachtbar ist. Das liegt daran, dass im Vergleich zu Gl.(8.97) das Zustandsraummodell um einen überflüssigen Zustand erweitert wurde, der sich nicht auf das Ein-Ausgangsverhalten des Gesamtsystems auswirkt. Nur bei Gl.(8.97) handelt es sich folglich um eine minimale Realisierung.

Zusammenfassend umfasst die minimale Realisierung die Pole der vollständige gekürzten Übertragungsfunktion $G(s)$ und ihre Dimension entspricht der Ordnung des Nennerpolynoms. Die Paare $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ und $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ einer minimalen Realisierung sind stets steuer- und beobachtbar. Wie alle Zustandsraumdarstellungen sind minimale Realisierungen nicht eindeutig, sondern lassen sich gemäß Gl.(8.30) ineinander überführen. Die minimale Realisierung enthält keine für das Ein-Ausgangs-Verhalten überflüssigen Zustände und ist deshalb eine Umsetzung mit der minimalen Anzahl an Zuständen. Durch die minimale Realisierung werden Zustände, die nicht steuerbar oder nicht beobachtbar sind, entfernt. Dies ist plausibel, da diese Zustände zwar für die Beschreibung der Eigenbewegung des Systems im Zustandsraummodell notwendig sein können, hingegen in der Beschreibung des Eingangs-Ausgangs-Verhaltens abkömmlich sind.

8.8 Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung

Analog zu der Übertragung einer zeitkontinuierlichen Differentialgleichung in die Form einer zeitdiskreten Differenzengleichung, lässt sich eine zeitkontinuierliche Zustandsraumbeschreibung in eine zeitdiskrete überführen. Die zeitdiskrete Form der Zustandsraumdarstellung wird vor allem bei der Abtastregelung kontinuierlicher Regelstrecken und zur digitalen Simulation kontinuierlicher Systeme eingesetzt.

Ausgehend von der Lösung der kontinuierlichen Zustandsdifferentialgleichung, Gl.(8.49)

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad t > t_0 \tag{8.49}$$

lässt sich der Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$ zu den Abtastzeitpunkten berechnen. Dazu werden die Integrationsgrenzen zu $t = (k+1)T$ und $t_0 = kT$ mit der Abtastzeit T angenommen.

$$\boldsymbol{x}((k+1)T) = e^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\boldsymbol{A}((k+1)T-\tau)}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{8.98}$$

Mit der Substitution $\theta = \tau - kT$ vereinfacht sich der Integralausdruck, und es ergibt sich

$$\boldsymbol{x}((k+1)T) = e^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(kT) + e^{\boldsymbol{A}T}\int_{0}^{T} e^{-\boldsymbol{A}\theta}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(kT+\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad . \tag{8.99}$$