

## 9 Mehrgrößensysteme

### 9.1 Zentrale versus Dezentrale Regelung

Bereits in den Ausführungen zum Zustandsraum, wie auch im Abschnitt zur Mehrgrößenregelung bei den vermaschten Regelkreisen wurden Systeme untersucht, welche mehrere Ein- und/oder Ausgangsgrößen besitzen. Dabei wurde kurz beleuchtet, welche zusätzlichen Probleme aus der Kopplung mehrerer Regelkreise erwachsen. Im Kapitel 8 wurde mit den Zustandsreglern ein umfassendes Konzept präsentiert, um diese Systeme systematisch zu regeln. Die Beschreibungsform des Zustandsraumes bietet dabei einen einheitlichen Zugang sowohl für Systeme mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße (die nach der englischen Abkürzung für Single Input Single Output auch SISO-Systeme genannt werden) als auch für Systeme mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen (Multiple Input Multiple Output, MIMO).

Die Zustandsregelung gehört bei der Regelung von MIMO-Systemen zu der Klasse der sogenannten zentralen Regelungen, bei denen es einen einzigen Regler gibt, der die verfügbaren Regelgrößen aufnimmt, verarbeitet und alle Stellgrößen berechnet. Die Verwendung des Zustands  $\mathbf{x}$  und die Vorschrift  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$  implizieren dabei direkt die Verwendung aller Stell bzw. Regelgrößen. Lineare zentrale Ausgangsrückführungen können analog zu Gl.(8.60) in Form einer (potentiell voll besetzten) Übertragungsmatrix geschrieben werden. Für ein MIMO-System mit  $p$  Eingangs- und  $q$  Ausgangsgrößen ist diese eine  $p \times q$ -Übertragungsmatrix  $\mathbf{K}(s)$  mit

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_p(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1q}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{ij}(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}(s)} \cdot \begin{bmatrix} W_1(s) - Y_1(s) \\ \vdots \\ W_q(s) - Y_q(s) \end{bmatrix}. \quad (9.1)$$

mit den Teilsystemen  $G_{ij}(s) = \frac{U_i(s)}{E_j(s)}$ .

Das Konzept der zentralen Regelung hat den Nachteil, dass die zentrale Implementierung der Regelung es notwendig macht, alle Ein- und Ausgangssignale der gleichen Recheneinheit zukommen zu lassen. Bei örtlich verteilten Mehrgrößensystemen wie verfahrenstechnischen An-

lagen kann es hierbei zu zusätzlichen Totzeiten bei der Bereitstellung und Übermittlung der notwendigen Signale kommen. Auch bewirkt die Überlastung oder der Ausfall einer einzigen Recheneinheit die Stabilitätsgefährdung sämtlicher Ausgangsgrößen. Daher ist es unter Umständen erstrebenswert, statt einer zentralen Regelung mehrere dezentral arbeitende Regler einzusetzen.

Eine dezentrale Regelung ist dabei eine MIMO-Regelung  $K(s)$ , die in jeder Zeile und Spalte genau ein Element enthält, das verschieden von Null ist. Diese Zuordnung ist nur dann möglich, wenn  $p = q$  gilt, d.h. dass das System genauso viele Ein- wie Ausgangsgrößen besitzt. Bei der dezentralen Regelung von MIMO-Systemen werden folglich die jeweiligen Regelgrößen von separaten voneinander unabhängigen Reglern geregelt, da jede Stellgröße über genau eine einzige Regelabweichung ermittelt wird. Somit können Kommunikationswege kurz gehalten und die Funktionalität auf mehrere Steuergeräte verteilt werden. Als zusätzlicher Vorteil wird das Problem der Mehrgrößenregelung hierdurch auf das bereits bekannte Problem einer SISO-Regelung zurückgeführt. Nachteilig am dezentralen Reglerentwurf ist, dass durch die eingeschränkte Struktur von  $K(s)$  nicht alle Kopplungen zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen explizit adressiert werden können. Abhängig von der Stärke der Kopplungen zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen muss entschieden werden, ob ein dezentraler Reglerentwurf möglich ist. Ist eine dezentrale Regelung möglich, so lassen sich mit entsprechenden Modifikationen die für SISO-Systeme bekannten Entwurfsmethoden anwenden. Dabei muss für jedes zusammengehöriges Paar von Eingang- und Ausgangssignal ein Regler entworfen werden. Um besonders geeignete Paare zu identifizieren und bewerten zu können, in welchen Fällen eine dezentrale Regelung eine zentrale Regelung ersetzen kann, ist es in dabei zunächst notwendig, MIMO-Systeme auf einige wichtige Eigenschaften hin zu untersuchen.

## 9.2 Eigenschaften von Mehrgrößensystemen

Ein lineares MIMO-System kann analog zu den SISO-Systemen sowohl durch seine Zustandsraumdarstellung wie in Gl.(8.4) als auch seine  $q \times p$  Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  analog zu Gl.(9.1) mit

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & \dots & G_{ij}(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(s)} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_p(s) \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

und den Einzelübertragungsfunktionen  $G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$  beschrieben werden. Charakteristisch für MIMO-Systeme ist also offensichtlich eine Kopplung von Stell- und Regelgrößen über  $G_{ij}(s)$ , wobei mehrere Stellgrößen die gleiche Regelgröße beeinflussen. Mehrgrößensysteme, bei denen die Kopplung von Stell- und Regelgrößen nur sehr schwach ausgeprägt ist, können durch Ausnutzung von Nulleinträgen in  $\mathbf{G}$  in mehrere einschleifige Regelkreise zerlegt werden, für die ein Entwurf der bereits beschriebenen dezentralen Regelungen direkt vorgenommen werden kann. Kann die Querkopplung nicht vernachlässigt werden, so kann das System oft trotzdem durch mehrere Teilregler geregelt werden, wobei beim Reglerentwurf die Querkopplungen berücksichtigt werden müssen.

### 9.2.1 Rechenregeln für Mehrgrößensysteme

Zentrale Rechenregeln für Übertragungsfunktionen sind die Verschaltung dieser in Form von Reihen- und Parallelschaltung sowie von Rückführungen. Da es sich bei MIMO-Systeme nicht mehr um Übertragungsfunktionen sondern um Übertragungsmatrizen handelt, ist dabei die Reihenfolge der Übertragungsglieder wichtig. Die Reihenfolge der Multiplikation der Teilsysteme kann also nicht mehr wie im SISO Fall, siehe Kapitel 3 Tab. 3-7, vernachlässigt werden. Die Übertragungsfunktionsmatrix einer Parallelschaltung von zwei Elementen ergibt sich aus der Summe der Übertragungsfunktionen der Elemente. Die Summanden müssen dabei die gleiche Dimension besitzen.

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2) \mathbf{U} \quad (9.3)$$

Die Übertragungsfunktionsmatrix einer Reihenschaltung von zwei Teilsystemen, siehe Bild 9-1, der Form

$$Y_1 = G_1 U \quad , \quad Y = G_2 Y_1 \quad (9.4)$$

ergibt sich durch das Einsetzen von dem Ausdruck  $Y_1$  in den zweiten

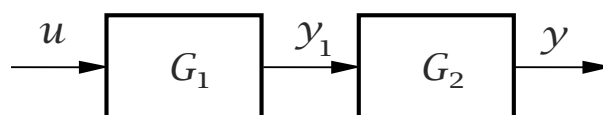


Bild 9-1: Reihenschaltung von einem MIMO-System

Term der Gl.(9.4) zu der gesamt Übertragungsfunktionsmatrix für die Reihenschaltung der Teilsysteme als

$$Y = (G_2 \cdot G_1) U \neq (G_1 \cdot G_2) U \quad (9.5)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Teilsysteme  $G_1$  und  $G_2$  entgegen der Signalflussrichtung angeordnet sind. Das Eingangssignal  $U$  wird zuerst von Teilsystem  $G_1$  und folgend von  $G_2$  verarbeitet. Da Vektoren (wie  $U$ ) immer von rechts an Matrizen multipliziert werden, ergibt sich die hergeleitete Reihenfolge.

Das Gesamtsystem einer Rückführung mit zwei Elementen, dargestellt in Bild 9-2, wird durch den Vorwärtszweig  $G_v$  und den Rückwärtszweig des System charakterisiert.

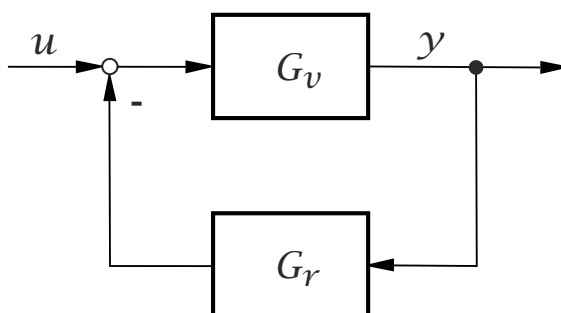


Bild 9-2: Rückführung von einem MIMO-System

Dabei gilt unter Beachtung der Multiplikationsreihenfolge erhält man

für das Gesamtsystem in Bild 9-2 wegen  $y = G_v (u - G_r y)$  die Übertragungsfunktionsmatrix

$$\begin{aligned} G_{RF}(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_v(s)\mathbf{G}_r(s))^{-1} \mathbf{G}_v(s) \\ &= \mathbf{G}_v(s) (\mathbf{I} + \mathbf{G}_r(s)\mathbf{G}_v(s))^{-1}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

wobei die zweite Variante mit rechtsseitiger Inversen über entsprechende Rechenregeln der Matrizenmultiplikation nachgewiesen werden kann. Hierbei ist  $G_0(s) = G_r(s)G_v(s)$  der offene Regelkreis und  $F(s) = \mathbf{I} + \mathbf{G}_r(s)\mathbf{G}_v(s)$  wird Rückführdifferenzmatrix genannt.

### 9.2.2 Polstellen von Mehrgrößensystemen

Für SISO-Systeme ist bekannt, dass die Polstellen der Übertragungsfunktion  $G(s)$  im Falle einer minimalen Realisierung genau den Eigenwerten der Matrix  $A$  der Zustandsraumdarstellung entsprechen. Da die Zustandsraumdarstellung für Mehrgrößensysteme identisch zu der für Eingrößensysteme ist, gilt dieser Zusammenhang folglich auch für diese. Folglich ist es bei einem Mehrgrößensystem in Zustandsraumdarstellung sehr einfach, die Systemordnung und die Polstellen des Systems abzulesen.

Liegt das Mehrgrößensystem als Übertragungsmatrix  $G(s)$  vor, so gestaltet sich die Bestimmung der Polstellen schwieriger, was vor allem daran liegt, dass die Systemordnung und die Vielfachheit der Polstellen nicht direkt ersichtlich ist. Das Vorgehen zur Bestimmung der Polstellen ist daher, eine Realisierung von  $G(s)$  im Zustandsraum zu suchen und deren Eigenwerte zu bestimmen. Hierbei muss aber beachtet werden, dass es sich um eine minimale Realisierung handelt, da ansonsten zusätzliche Polstellen entstehen. Eine sehr einfache, in der Regel aber nicht minimale Realisierung, kann man erhalten, indem man jedes Element  $G_{ij}(s)$  der Übertragungsmatrix  $G(s)$  in der für Eingrößensysteme bekannten Weise in ein Zustandsraummodell überführt und anschließend aus allen erhaltenen Teilmodellen ein Gesamtmodell als Blockmatrix zusammensetzt. Dieser Weg führt im Allgemeinen deshalb nicht auf eine minimale Realisierung, da Eigenvorgänge des Systems mehrfach abgebildet werden, wenn verschiedene  $G_{ij}(s)$  dieselben Polstellen besitzen. Da eine minimale Realisierung jedoch nur weniger Eigenwerte als die so sehr einfach gewonnene Zustandsraumdarstellung haben

kann, folgt, dass die Polstellen des MIMO-Systems abgesehen von der Vielfachheit genau den Polstellen der Einzelemente  $G_{ij}(s)$  entsprechen. Folglich ist das Mehrgrößensystem  $\mathbf{G}(s)$  genau dann stabil, wenn alle Einträge  $G_{ij}(s)$  stabil sind.

Für verschiedene Zwecke reicht es jedoch nicht aus, nur die Position der Polstellen, nicht aber deren Vielfachheit zu kennen. Neben der Aufstellung einer minimalen Realisierung ist dies insbesondere für Anwendungen des vollständigen Nyquist-Kriteriums unabkömmlich, dessen Ergebnis von der Anzahl der instabilen Polstellen und damit auch von deren Vielfachheit abhängt. Aus expliziten Konstruktionsvorschriften für eine minimale Realisierung, die sukzessive nicht steuer- und nicht beobachtbare Zustände entfernt, lässt sich dabei herleiten, dass das charakteristische Polynom der minimalen Realisierung der kleinste gemeinsame Nenner von allen Determinanten und Unterdeterminanten von  $\mathbf{G}(s)$  ist. Da die Unterdeterminanten erster Ordnung den einzelnen Elementen  $G_{ij}$  entsprechen ist hier auch der vorherigen Ausführungen Rechnung getragen.

Als Beispiel für die Bestimmung der Pole eines MIMO-Systems sei folgende Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}$  gegeben:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{1-s}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Die Unterdeterminanten zweiter Ordnung von Gl.(9.7) ergeben sich zu

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)^2}, \quad \frac{2}{(s+1)(s+2)}, \quad \frac{1}{(s+1)(s+2)}. \quad (9.8)$$

Zusammen mit den Unterdeterminanten erster Ordnung ergibt sich der kleinste gemeinsame Nenner zu

$$(s+1) \cdot (s+2)^2 \cdot (s-1). \quad (9.9)$$

Die Polstellen des MIMO-Systems  $\mathbf{G}$  ergeben sich folglich zu  $-1$ ,  $-2$ ,  $-2$  und  $+1$ . Dieses Ergebnis konnte ohne eingehende Analyse nicht abgelesen werden, da beispielsweise der Eigenvorgang zu  $s = 1$  ebenfalls zweimal in  $\mathbf{G}$ , sich jedoch nicht in einer doppelten Polstelle niederschlägt.

### 9.2.3 Richtungsabhängige Verstärkung

Bei linearen Systemen bietet der Frequenzgang eine Beschreibung des Verhältnisses der Zeiger der harmonischen Ausgangs- und Eingangsgröße. Für ein stabiles SISO-System ist die Amplitudenverstärkung dabei durch  $|G(j\omega)|$  beschrieben und ist daher nur von der Frequenz  $\omega$  der Eingangsgröße  $u$  abhängig, nicht aber von deren Amplitude. Dies liegt daran, dass die einfache Rechnung

$$\frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} = \frac{|G(j\omega) \cdot U(j\omega)|}{|U(j\omega)|} = |G(j\omega)| \cdot \frac{|U(j\omega)|}{|U(j\omega)|} = |G(j\omega)| \quad (9.10)$$

wegen der Multiplikativität des Betrages  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$  im SISO-Fall Gültigkeit hat. Für MIMO-Systeme sind  $Y(j\omega)$  und  $U(j\omega)$  vektorwertige Größen, weshalb eine Norm  $\|\cdot\|$  anstelle des Betrages Verwendung finden muss. Bei einem analogen Vorgehen ergibt sich hier

$$\frac{\|G(j\omega) \cdot U(j\omega)\|}{\|U(j\omega)\|} \leq \|G(j\omega)\| \cdot \frac{\|U(j\omega)\|}{\|U(j\omega)\|} = \|G(j\omega)\|, \quad (9.11)$$

da hier keine Multiplikativität, sondern nur Submultiplikativität gegeben ist. Welche der Werte kleiner gleich der Matrixnorm  $\|G(j\omega)\|$  angenommen wird, hängt dabei von der Richtung des Eingangsvektors  $U(j\omega)$  ab. Analog zu quadratischen Matrizen, wo Vektoren in Richtung von Eigenvektoren, deren Eigenwerte große Beträge haben, stärker gestreckt werden als Vektoren in Richtung von Eigenvektoren, deren Eigenwerte kleine Beträge haben, so gilt gleiches auch für die Eingangsvektoren  $U(j\omega)$ . Da  $G(j\omega)$  jedoch nicht quadratisch ist, behilft man sich mit dem Konzept der Singulärwerte, die auch für nicht quadratische Matrizen definiert sind. Die Singulärwerte  $\sigma_i(M)$  einer Matrix  $M$  sind dabei die positiven Quadratwurzeln der Eigenwerte von  $M^T M$ , also

$$\sigma(M) = \sqrt{\lambda(M^T M)} \quad (9.12)$$

Geometrisch kann man die Singulärwerte als richtungsabhängige Streckungsfaktoren interpretieren, wobei  $\bar{\sigma}$  den größten und  $\underline{\sigma}$  den kleinsten Singulärwert bezeichnet. Abhängig von der Richtung des Vektors ergibt sich die tatsächliche Verstärkung zu

$$\underline{\sigma} \leq \frac{\|Y(j\omega)\|}{\|U(j\omega)\|} \leq \bar{\sigma}, \quad (9.13)$$

wobei der tatsächliche Wert nur durch Ausführung der Matrix-Vektor-Multiplikation  $\mathbf{G}(j\omega) \cdot \mathbf{U}(j\omega)$  ermittelt werden kann. Eine anschauliche Interpretation dieser richtungsabhängigen Verstärkung liefert bereits das einfache Beispiel eines Tanks mit der Füllstandshöhe als Regelgröße  $y$ , einem Ventil  $u_1$  im Zulauf und einem Ventil  $u_2$  im Ablauf. Offensichtlich hat ein gleichzeitiges Öffnen beider Ventile ( $\mathbf{u} = [1, 1]^T$ ) einen viel geringeren Einfluss auf  $y$  als ein wechselseitiges Schließen und Öffnen ( $\mathbf{u} = [1, -1]^T$ ), obwohl  $\|\mathbf{u}\|$  für beide Eingangsvektoren gleich ist.

Die geschilderte Richtungsabhängigkeit der Verstärkung kann den Reglerentwurf erschweren, was anschaulich dadurch eingesehen werden kann, dass die Durchtrittsfrequenzen  $\omega_d$  mit  $|G(j\omega_d)| = 1$  im SISO-Fall eine entscheidende Rolle für die Stabilität des Regelkreises spielt. Durch die Richtungsabhängigkeit entsteht für große Unterschieden zwischen  $\underline{\sigma}$  und  $\overline{\sigma}$  ein großes Durchtrittsfrequenzband, was offensichtlich die Reglerauslegung verkompliziert. Richtungsabhängigkeit kann dabei auch durch schlechte Skalierung der Ein- und Ausgangssignale entstehen oder verstärkt werden, weswegen es zielführend ist, durch Einführung entsprechender Skalierungsmatrizen diese Effekte zu minimieren. Anschaulich kann die Bedeutung der Skalierung damit so verstanden werden, dass die Werte der Ein- und Ausgangssignale der Prozesse von der gewählten physikalischen Einheit abhängen. Je nach Größe der Einheit ist keine Vergleichbarkeit bei unterschiedlichen Ein- und Ausgangsgrößen gegeben. Zur Durchführung der Skalierung werden Skalierungsmatrizen als Diagonalmatrizen verwendet. Um diese aufzustellen ermittelt man die maximal zulässigen Stellgrößen separat für alle Stellgrößen und schreibt diese in eine Diagonalmatrix  $\mathbf{S}_u$ . Mit einem analogen Vorgehen für den größten zulässigen Regelfehler (oder alternativ die größte zu erwartende Sollwertänderung) erhält man die Diagonalmatrix  $\mathbf{S}_y$ . Bezeichnet man nun die unskalierten Größen mit  $\hat{\mathbf{u}}$  und  $\hat{\mathbf{y}}$ , die skalierten Größe jedoch mit  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{y}$ , so ergibt sich der Zusammenhang

$$\mathbf{S}_u \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad , \quad \mathbf{S}_y \mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} \quad (9.14)$$

und damit die skalierte Prozessbeschreibung

$$\mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{S}_y^{-1} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{S}_u}_{\mathbf{G}} \mathbf{u} \quad (9.15)$$



wobei die Skalierungsmatrizen durch ihre Konstruktion invertierbar sind.

### 9.3 Verfahren zur dezentralen Regelung

Bei einer dezentralen Regelung werden die jeweiligen Regelgrößen von separaten und untereinander unabhängigen Reglern geregelt und das Problem der Mehrgrößenregelung somit auf die bereits bekannten Problematik einer SISO-Regelung zurückgeführt. Hierfür ist es in einem ersten Schritt notwendig, passende Paarungen von Ein- und Ausgangsgrößen für die einschleifigen Regelkreise zu ermitteln. Ein Maß für die Auswahl dieser Ein- und Ausgangspaare ist das Relative Gain Array (RGA), welches die direkte Wirkung und die Gesamtwirkung von Eingangs- auf Ausgangsgrößen ins Verhältnis setzt und mit dem Symbol  $\Lambda$  bezeichnet wird. Für das lineare MIMO-System  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$  wird die direkte Wirkung von  $u_j$  auf  $y_i$  durch

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{u_{k \neq j} = \text{const.}} = [G(s)]_{ij} \quad (9.16)$$

beschrieben, d.h. außer  $u_j$  werden alle Eingänge identisch Null gewählt. Bei einer Regelung mit mehreren Einzelregelkreisen entsteht neben dieser direkten Wirkung jedoch auch eine indirekte, da  $u_j$  nicht nur auf  $y_i$ , sondern auch auf  $y_{k \neq i}$  wirkt. Das erzeugt jedoch eine Regelabweichung in den anderen Regelkreisen, weswegen sich auch die anderen  $u_{l \neq j}$  ändern, die wiederum einen Einfluss auf  $y_i$  haben. Die Summe aus direkter und indirekter Wirkung wird als Gesamtwirkung bezeichnet. Die Gesamtwirkung von  $u_j$  auf  $y_i$  ergibt sich folglich, wenn alle anderen Ausgänge  $y_{k \neq j}$  perfekt eingeregelt werden. Betrachtet man dazu die ideale Stellgröße  $U(s) = G^{-1}(s) \cdot Y(s)$ , so ergibt sich

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right|_{y_{k \neq i} = \text{const.}} = [G^{-1}(s)]_{ji} \Rightarrow \left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{y_{k \neq i} = \text{const.}} = \frac{1}{[G^{-1}(s)]_{ji}} \quad (9.17)$$

Das RGA als Verhältnis der direkten zu der Gesamtwirkung ergibt sich damit zu

$$\Lambda_{ij}(s) = \frac{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{u_{k \neq j} = \text{const.}}}{\left. \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right|_{y_{k \neq i} = \text{const.}}} = [G(s)]_{ij} \cdot [G^{-1}(s)]_{ji} \quad (9.18)$$

Für alle Kombinationen von Ein- und Ausgängen lässt sich die kompakte Formel

$$\Lambda(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \times (\mathbf{G}^{-1}(s))^T \quad (9.19)$$

angeben, wobei  $\cdot \times$  die elementweise Multiplikation bezeichnet. Aus Gl.(9.18) ist zudem ersichtlich, dass die Spalten- und Zeilensumme des RGA immer 1 beträgt, da alle direkten Wirkungen zusammen die Gesamtwirkung ergeben. Zudem ist das RGA unabhängig von Skalierungen und symmetrisch.

Es liegt auf der Hand, dass bei der Zuordnung von Stell- und Regelgrößen solche Kombinationen vorteilhaft sind, bei denen die direkte Wirkung näherungsweise der Gesamtwirkung entsprechen. Da das Relative Gain Array von  $s$  und damit der betrachteten Frequenz abhängt, hat sich die Heuristik als nützlich erwiesen, solche Zuordnungen zu bevorzugen bei denen die jeweiligen RGA-Elemente bis zur gewünschten Bandbreite des Regelkreises etwa eins sind. Hierbei sind Zuordnungen mit negativen Einträgen zu vermeiden, da dies impliziert, dass die direkte Wirkung und die Gesamtwirkung unterschiedliche Vorzeichen haben, was den Gesamtregelkreis leicht destabilisiert.

Zur Veranschaulichung wird das RGA des MIMO-Systems in Gl.(9.20) ermittelt, um eine gute Paarung von Ein- und Ausgangssignalen zu bestimmen:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+5} \\ \frac{s+1}{3s+1} & \frac{-2}{s+1} & 0 \\ \frac{7}{s+2} & s & \frac{2}{s+5} \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

Da die gewünschte Bandbreite noch nicht feststeht wird hier nur das stationäre Relative Gain Array mit  $s = 0$  betrachtet. Hierfür berechnet man

$$\Lambda(0) \approx \begin{bmatrix} 1,14 & \mathbf{0,86} & -1 \\ \mathbf{0,86} & 0,14 & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}. \quad (9.21)$$

Aufgrund der elementweisen Multiplikation wurden hier Nulleinträge von  $\mathbf{G}(0)$  in  $\Lambda(0)$  übernommen, was einer nicht existenten direkten Wirkung entspricht. Für die Berechnung von  $\Lambda$  müssen mit Ausnutzung der

Zeilen- und Spaltensumme sowie der Symmetrie hier nur drei Elemente explizit berechnet werden.

Für eine gute Paarung kommt zur Regelung von  $y_3$  nur  $u_3$  in Frage, da alle anderen Einträge der dritten Zeile nicht positiv sind. Obwohl zur Regelung von  $y_1$  sowohl  $u_1$  (mit  $1,14 \approx 1$ ) als auch  $u_2$  (mit  $0,86 \approx 1$ ) gleich gute Kandidaten wären, so ist wegen  $\Lambda_{22} = 0,14$  nur die hervor gehobene Paarung zielführend. Wegen des stärker von 1 abweichenden Eintrages sind im Regelkreispaar  $y_3 \rightarrow u_3$  stärkere Kopplungen durch die anderen Regelkreise zu erwarten. Konkret bedeutet der Wert von 2, dass die Wirkung von  $u_3$  auf  $y_3$  halbiert wird, wenn auch die anderen Regelkreise geschlossen werden. Dies muss bei der Auslegung der Einschleifenregler entsprechend berücksichtigt werden. Die Struktur der dezentralen Ausgangsrückführung gemäß Gl.(9.1) ist

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \star & 0 \\ \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{bmatrix}. \quad (9.22)$$

Auch wenn mit dem RGA ein heuristisches Maß für die Paarung von Ein- und Ausgangsgrößen vorliegt, so erlaubt dies zunächst keine Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises (selbst wenn alle Einzelregelkreise stabil arbeiten) oder die tolerierbare Abweichung von RGA-Einträgen von dem Idealwert 1. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nach Gl.(9.6) ist offensichtlich, dass die Nullstellen des charakteristische Polynoms  $\det(\mathbf{F}(j\omega)) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))$  alle in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen. Analog zum Nyquist-Kriterium für SISO-Systeme lässt sich zudem ein entsprechendes Pendant für MIMO-Systeme formulieren. Eine Analyse der Herleitung des Nyquist-Kriteriums für SISO-Systeme zeigt hierbei, dass für einen Übertrag auf den Mehrgrößenfall nur die Nullstellen  $n$  von  $1 + G_0(j\omega)$  durch die Nullstellen von  $\det(\mathbf{F}(j\omega))$  ersetzt werden müssen. Folglich gilt das folgende Nyquist-Kriterium für Mehrgrößensysteme:

Wenn die Übertragungsfunktion  $\mathbf{G}_0(s)$  des aufgeschnittenen Regelkreises  $p$  Pole in der rechten  $s$ -Halbebene aufweist, dann gilt:

Wenn die Ortskurve des Frequenzganges  $\det(\mathbf{F}(j\omega))$  beim

Durchlaufen der Frequenzwerte von  $-\infty$  über null bis  $+\infty$  den Ursprung genau  $p$  Mal im mathematisch positiven Sinn umfährt, dann ist der geschlossene Regelkreis stabil. Andernfalls ist er nicht stabil.

Hier ist zu beachten, dass es sich bei der Determinanten um eine skalare Größe handelt, für die wie üblich Ortskurven gezeichnet und Umdrehungen gezählt werden können. Da der Punkt  $-1$  bereits in der Determinanten durch die Identität  $\mathbf{I}$  in  $\mathbf{F}$  berücksichtigt wurde, sind hier die Umdrehungen um den Ursprung zu zählen. Man sieht zudem leicht, dass für vollständig entkoppelte Systeme die Formulierung des Nyquist-Kriteriums für Mehrgrößensysteme genau auf den bereits bekannten Eingrößenfall zurückfällt.

In dieser Form eignet sich die Mehrgrößen-Version des Nyquist-Kriteriums noch nicht für den Reglerentwurf, da der Verlauf der zu betrachtenden Ortskurve wegen der Determinanten auf undurchsichtige Weise von  $\mathbf{K}(s)$  abhängt. Glücklicherweise lässt sich aber leicht eine zweite, nutzbringendere Version gewinnen. Hierzu wird die Eigenschaft genutzt, dass sich die Determinante als Produkt der Eigenwerte ergibt, also

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(j\omega)) = \prod_{i=1}^q (1 + \lambda_i), \quad (9.23)$$

wobei  $\lambda_i$  die  $q$  Eigenwerte von  $\mathbf{G}_0(j\omega)$  bezeichnet. Daher lässt sich die Phasendrehung der Determinanten-Ortskurve durch die Summe der Phasendrehungen der Terme  $(1 + \lambda_i(j\omega))$  ersetzen. Analog zur Verschiebung zwischen  $N(s)$  und  $G_0(s)$  bei der Herleitung des Nyquist-Kriteriums in Bild 5-18 können nun wieder die Umdrehungen um den kritischen Punkt  $-1$  gezählt werden. Als zweite Variante kann also das folgende Kriterium angegeben werden:

Wenn die Übertragungsfunktion  $\mathbf{G}_0(s)$  des aufgeschnittenen Regelkreises  $p$  Pole in der rechten  $s$ -Halbebene aufweist, dann gilt:

Wenn die Ortskurven der Eigenwerte des Frequenzganges  $\det(\mathbf{F}(j\omega))$  beim Durchlaufen der Frequenzwerte von  $-\infty$  über null bis  $+\infty$  den Punkt  $-1$  zusammen genau  $p$  Mal

im mathematisch positiven Sinn umfahren, dann ist der geschlossene Regelkreis stabil. Andernfalls ist er nicht stabil.

Zunächst scheint durch diese zweite Version nicht viel gewonnen, da auch der Zusammenhang zwischen Eigenwerten und  $K(s)$  unklar erscheint. Allerdings lässt sich mithilfe des Gershgorin-Theorems eine einfache Abschätzung der Eigenwerte ableiten, durch die das so gewonnene Stabilitätskriterium aber nur noch hinreichend und nicht mehr notwendig ist.

Das Gershgorin-Theorem liefert Aussagen über das Gebiet, in welchem sich die Eigenwerte einer Matrix  $M$  befinden können. Mathematisch formuliert lautet der zugehörige Satz, dass zu jeder quadratischen Matrix  $M$  und zu jedem Eigenwert  $\lambda_i$  von  $M$  ein Diagonalelement  $m_{jj}$  existiert, sodass der Eigenwert nicht weiter entfernt von  $m_{jj}$  ist, als die Summe der Beträge der anderen in derselben wie  $m_{jj}$  stehenden Zeilen- oder Spaltenelemente:

$$|\lambda_i - m_{jj}| \leq \sum_{k \neq j} |m_{kj}| = r_j \quad \text{und} \quad |\lambda_i - m_{jj}| \leq \sum_{k \neq j} |m_{jk}| = R_j \quad (9.24)$$

Da die Diagonalelemente von  $G_0(j\omega)$  im Falle einer dezentralen Regelung genau die Einzelregelkreise sind, können sich also die gesuchten Ortskurven der Eigenwerte nicht allzu weit von den Ortskurven der Einzelregelkreise entfernen, sofern die Ausdrücke  $r_j$  oder  $R_j$  klein sind. Da für die Stabilitätsbetrachtung nur die Umdrehung um den Punkt  $-1$  entscheidend sind, können derartige Abweichungen zugelassen werden, sofern sich die Umdrehungszahl hierdurch nicht ändert. Dies motiviert die Definition der Diagonaldominanz. Eine Übertragungsmatrix  $G(j\omega)$  heißt zeilendominant, wenn

$$|G_{ii}(j\omega)| > \sum_{k \neq i} |G_{ik}(j\omega)| \quad (9.25)$$

und spaltendominant, wenn

$$|G_{ii}(j\omega)| > \sum_{k \neq i} |G_{ki}(j\omega)|. \quad (9.26)$$

Eine Übertragungsmatrix ist diagonaldominant, wenn sie entweder zeilen- oder spaltendominant ist.

Mit diesen Vorüberlegungen lässt sich eine leicht zu prüfende hinreichende Stabilitätsbedingung angeben.

Wenn die Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  des aufgeschnittenen Regelkreises  $p$  Pole in der rechten  $s$ -Halbebene aufweist und die Rückführdifferenzmatrix  $F(j\omega)$  diagonaldominant ist, dann gilt:

Wenn die Ortskurven der Diagonalelemente  $G_{0,ii}(j\omega)$  beim Durchlaufen der Frequenzwerte von  $-\infty$  über null bis  $+\infty$  den Punkt  $-1$  zusammen genau  $p$  Mal im mathematisch positiven Sinn umfahren, dann ist der geschlossene Regelkreis stabil.

Es gibt entsprechende Verallgemeinerungen, die dieses hinreichende Stabilitätskriterium zu einem notwendigen ergänzen, auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll [18]. Diagonaldominanz kann in diesem Sinne als ein Maß interpretiert werden, das sicherstellt, dass die Querkopplungen die stabilen Einzelregelkreise nicht destabilisieren. Der Entwurf einer dezentralen Regelung erfolgt nun üblicherweise iterativ. Nach der Zuordnung von Stell- und Regelgrößen mithilfe des RGA werden die Einzelregelkreise ausgelegt. Ist die nachfolgende Überprüfung der Diagonaldominanz positiv, so ist der Reglerentwurf abgeschlossen. Ist die Rückführdifferenzmatrix jedoch nicht diagonaldominant, so müssen die Einzelregler entsprechend modifiziert werden.

## 9.4 Mehrgrößenregelung mit Loop Shaping

Neben dem Entwurf dezentraler Reglerstrukturen oder einer zentralen Regelung über Zustandsrückführung ist auch die Regelung von Mehrgrößensystemen auf Basis der Ideen des Closed Loop Shaping in Abschnitt 5.7 ein etabliertes Vorgehen. Hierzu muss das Optimierungsproblem in Gl.(5.93) dergestalt erweitert werden, dass es auch für Mehrgrößensysteme formuliert werden kann. Um dabei eine möglichst generellen Prototyp von Optimierungsproblemen zu erhalten, wird dabei auf die mächtige Darstellungsform der Generalized Plant zurückgegriffen. Diese stellt eine Verallgemeinerung des klassischen Regelkreises dar, indem die auftretenden Signale in vier verschiedene Kategorien unterteilt werden:

- Eingänge, die vom zu entwerfenden Regelkreiselement  $K$  gestellt werden können. Dies sind klassisch die Stellgrößen. Diese Eingänge werden mit der Variablen  $\mathbf{u}$  bezeichnet.
- Alle weiteren Eingänge, die nicht vom Regelkreiselement gestellt werden können. Dies können beispielsweise Referenzgrößen, Störgrößen oder Messrauschen sein. Sie werden unter der Variablen  $\mathbf{w}$  zusammengefasst.
- Die Ausgänge, die dem zu entwerfenden Regelkreiselement  $K$  als Eingänge zur Verfügung gestellt werden. Beim Entwurf einer Ausgangsrückführung wäre dies die gemessene Regelabweichung (inklusive Messrauschen). Dieser Ausgang wird mit  $\mathbf{v}$  bezeichnet.
- Die Ausgänge, die als Ziel der Regelung minimiert werden sollen. Im Falle einer Regelung wäre dies die tatsächliche Regelabweichung (ohne Messrauschen). Diese erhalten die Bezeichnung  $\mathbf{z}$ .

Die Generalized Plant  $\mathbf{P}$  stellt gemäß Bild 9-3 die Verknüpfung zwischen diesen Ein- und Ausgangsgrößen dar und ist eine mehrdimensionale Übertragungsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}(s)} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (9.27)$$

Die Aufgabe des Entwurfs von  $K$  kann so beschrieben werden, dass eine Übertragungsfunktion  $K(s)$  gesucht wird, die die Auswirkung von  $\mathbf{W}(s)$  auf  $\mathbf{Z}(s)$  minimiert. Die Übertragungsfunktion  $\mathcal{F}$  dieses geschlossenen Regelkreises der Generalized Plant ist beschrieben durch

$$\mathcal{F}(s) = \frac{\mathbf{Z}(s)}{\mathbf{W}(s)} = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21} \quad (9.28)$$

Das allgemeine Optimierungsproblem lautet dann

$$\min_{\mathcal{y}} \|\mathcal{F}(s)\|_{\infty} \leq \mathcal{y}. \quad (9.29)$$

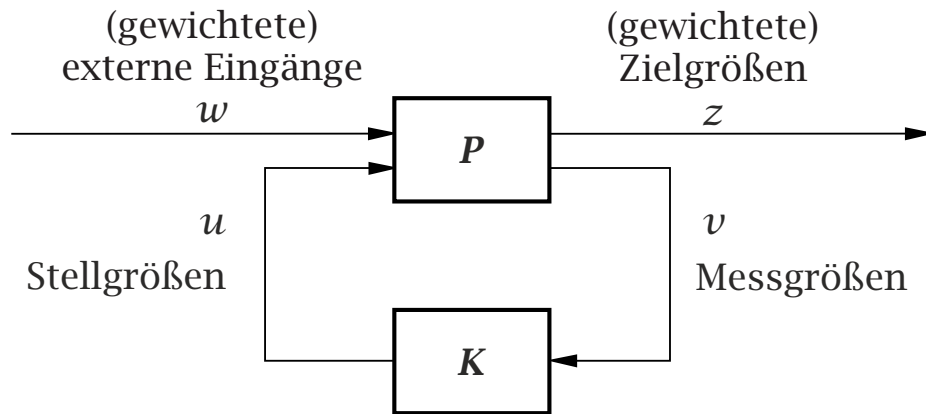


Bild 9-3: Grundsätzlicher Aufbau der Generalized Plant

Da es sich hierbei um ein Mehrgrößensystem handelt, muss die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm noch für MIMO-Systeme erweitert werden. Dies geschieht unter Berücksichtigung der Richtungsabhängigkeit durch

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty := \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)), \quad (9.30)$$

wobei Gl.(9.30) für SISO-Systeme offensichtlich auf Gl.(5.89) zurückfällt. Das bereits in Abschnitt 5.7 diskutierte Verfahren der Weighted Sensitivity lässt sich in die Struktur der Generalized Plant überführen, indem unter der Annahme einer Sollwertfolge  $w(t) = r(t)$  und einer Ausgangsrückführung  $v(t) = w(t) - y(t)$  der mit  $W(j\omega)$  gewichtete Ausgangsfehler (d.h.  $Z(s) = W_P(s)(W(s) - Y(s))$ ) minimiert werden soll. Das aus Gl.(9.28) und Gl.(9.29) bestehende Optimierungsproblem lässt sich analog zu Abschnitt 5.7 lösen. Die Ordnung des Regelkreiselementes  $\mathbf{K}(s)$  entspricht in dieser Verallgemeinerung der Ordnung der Generalized Plant.

In Abschnitt 5.6.4 wurde ausgeführt, dass entsprechende Kriterien für den geschlossenen Regelkreis nicht nur für die Sensitivität formuliert werden können. Ein entsprechender Verlauf ist auch für  $T(j\omega)$  erwünscht, um gutes Führungsverhalten sowie eine geringe Auswirkung von Messrauschen auf den Regelfehler zu garantieren. Ein weiteres Übertragungsverhalten im klassischen Regelkreis, welches von Inter-



esse ist, ist das Übertragungsverhalten von sämtlichen Eingangsgrößen auf die Stellgröße  $u$ , welches durch die Funktion

$$KS(s) = \frac{U(s)}{W(s)} = G_R(s) \cdot S(s) \quad (9.31)$$

beschrieben wird: Das Produkt des Reglers mit der Sensitivitätsfunktion. Es liegt nahe, dass der Einfluss der Eingangsgrößen auf die Stellgröße ebenfalls gering sein soll, da die verfügbare Stellenergie begrenzt ist.

In praktischen Anwendungen müssen oft nicht nur eine, sondern mehrere Übertragungsfunktionen betrachtet werden. Der Reglerentwurf mit der Mixed Sensitivity Methode kann diese Anforderung mithilfe der Generalized Plant berücksichtigen. Hierzu wird die folgende Generalized Plant aufgestellt:

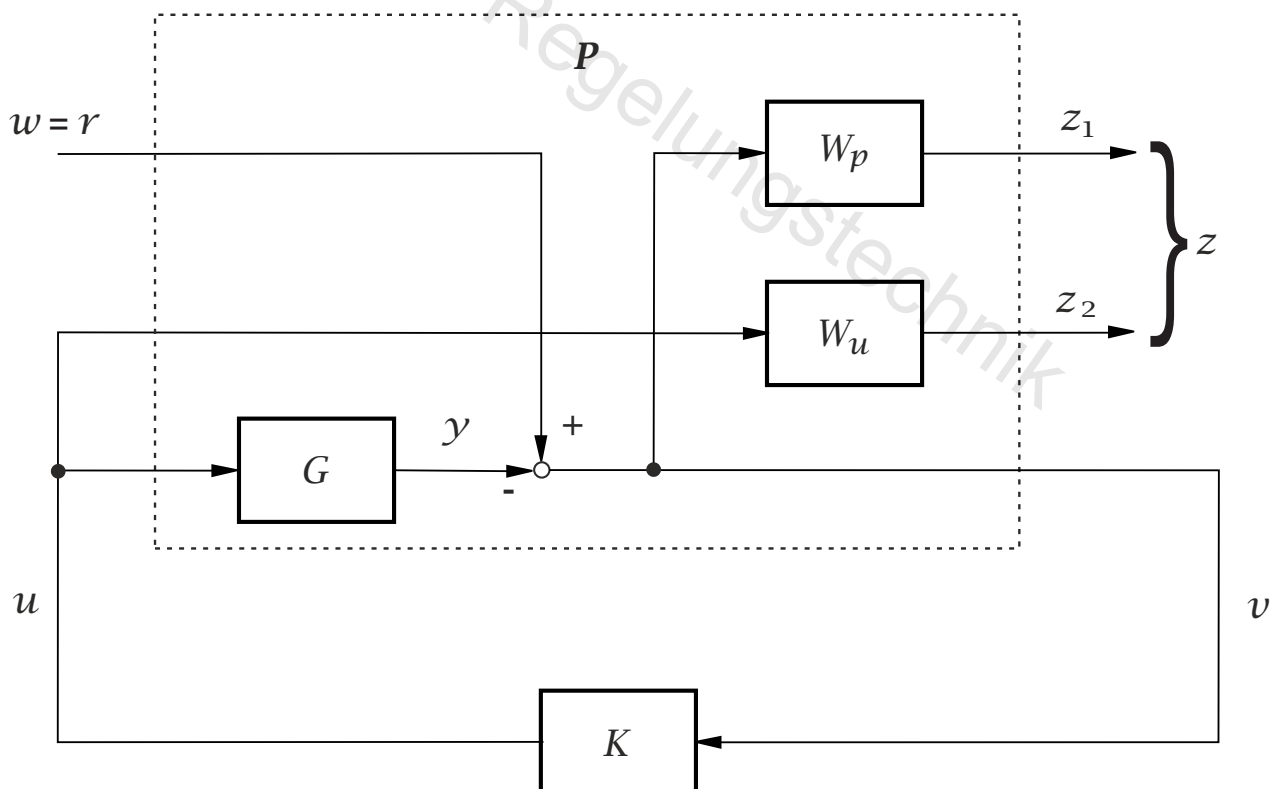


Bild 9-4: Struktur der Generalized Plant für die Mixed Sensitivity

Unter der Annahme einer Sollwertfolge  $w(t) = r(t)$  ergeben sich die Ausgänge  $\mathbf{Z}$  zu

$$\mathbf{Z} = [z_1(t), z_2(t)] = \left[ W_p(s)(w - y), W_u(s)u(t) \right] \quad (9.32)$$

Die Auslegung der gewichteten Filter  $W_p(s)$ ,  $W_u(s)$  folgt dabei dem Entwurfsverfahren der Weighted Sensitivity die bereits für SISO-Systeme besprochen wurde und analog angewendet werden kann. Die generalisierte Strecke  $\mathbf{P}(s)$  ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11} &= \left[ W_p(s), 0 \right]^T \\ \mathbf{P}_{12} &= \left[ -W_p(s)G(s), W_u(s)I \right]^T \\ \mathbf{P}_{21} &= 1 \\ \mathbf{P}_{22} &= -G(s) \end{aligned} \quad (9.33)$$

Durch die Betrachtung der Singulärwerte ergibt sich die Gütefunktion im vorliegenden Fall zu

$$\|\mathcal{F}(s)\|_\infty = \sqrt{(W_p S)^2 + (W_u KS)^2}. \quad (9.34)$$

Das Größenverhältnis zwischen den beiden Filtern  $W_p$  und  $W_u$  gibt also - in gewisser Analogie zur optimalen Zustandsregelung in Abschnitt 8.5.3 - als Gewichtung zwischen Stellaufwand und Regelabweichung gedeutet werden.

Neben der Mixed-Sensitivity, welche die Übertragungsfunktionen  $S$  und  $KS$  miteinander gewichtet, sind auch zahlreiche andere Kombinationen denkbar, die aufgrund der Formulierung als Generalized Plant alle im identischen Optimierungsrahmen behandelt werden können. So berücksichtigt der populäre  $S$ - $KS$ - $T$ -Entwurf zusätzlich noch eine Gewichtung der komplementären Sensitivität. Außerdem können gegebenenfalls auch Unsicherheiten der Regelstrecke mit in das Optimierungsproblem eingebracht werden. Der Entwurfsrahmen erlaubt auch die Auslegung von anderen Regelkreiselementen außer Ausgangsrückführungen, indem die Größe  $\mathbf{v}$  entsprechend modifiziert wird. Somit können unter anderem auch Vorsteuerungen realisiert werden.