

11 Iterativ Lernende Regelung

11.1 Allgemeines

In vielen industriellen Anwendungen werden technische Anlagen dergestalt betrieben, dass diese eine identische Aufgabe stets aufs Neue wiederholen. Prominente Beispiele hierfür sind viele Produktionsprozesse wie Fräsen oder Gießen aber auch robotische Montagearbeiten an Fließbändern. Eine konventionelle Regelung solcher zyklisch ablaufender Prozesse besteht aus einem klassischen Regler, welcher den sicheren Betrieb des Prozesses ermöglicht, kombiniert mit einer Vorsteuerung, welche der Verbesserung des Führungsverhaltens dient. Damit verwenden diese Regelungskonzepte jedoch nur die aktuellen Informationen über die Führungsgröße und die Regelabweichung, nicht jedoch die Informationen über die Leistungsfähigkeit der Regelung in den vorangegangenen Zyklen. Das Konzept der Iterativ Lernenden Regelung (ILR) wurde in den 1980er Jahren entwickelt und stellt einen systemtheoretischen Rahmen bereit, dem zyklischen Charakter der Prozesse explizit Rechnung zu tragen und ein Regelung zu entwickeln, welche aus den Regelfehlern der vergangenen Zyklen Rückschlüsse auf notwendige Eingriffe im aktuellen Zyklus zieht. Hierzu wird die Zeit zwischen zwei ablaufenden Zyklen dazu genutzt, aus den abgespeicherten Verläufen der Stellgröße und der Regelabweichung eine Modifikation der Vorsteuerung im nächsten Zyklus zu berechnen. Obwohl damit die ILR innerhalb eines Zyklus als Steuerung agiert, da die vorgesteuerte Stellgröße für den gesamten Zyklus im Vorhinein berechnet wird, so entsteht durch das Einbeziehen vergangener Zyklen dennoch ein geschlossener Wirkungsablauf. Somit ist die Bezeichnung als Iterativ Lernende *Regelung* gerechtfertigt. Der Wirkungsplan der ILR ist dabei in Bild 11-1 gezeigt:

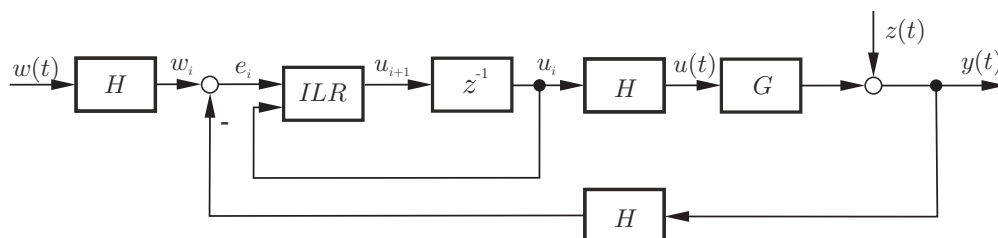


Bild 11-1: Wirkungsplan einer Iterativ Lernenden Regelung

Die Solltrajektorie $w(t)$ des i -ten Zyklus wird im Speicher H abgespeichert, welcher dann die Trajektorie des i -ten Zyklus w_i bereitstellt. Der Index i zeigt dabei an, dass es sich nicht mehr um Zeitverläufe, sondern einen zyklusbezogenen gespeicherten Verlauf handelt. Analog wird der Verlauf der Ausgangsgröße aufgezeichnet und somit die Regeldifferenz e_i des i -ten Zyklus gebildet. Diesen verwendet die ILR zusammen mit der ebenfalls gespeicherten Stellgröße u_i dazu, den neuen Stellgrößenverlauf u_{i+1} zu ermitteln und in einen Speicher zu schreiben. Diese Berechnung wird in der Zeit zwischen zwei Zyklen vorgenommen. Der Indexwechsel $i \rightarrow i + 1$ (als Multiplikation mit z^{-1}) zeigt den Beginn des folgenden Zyklus an. Hier wird die vorberechnete Trajektorie u_{i+1} abgerufen und der Prozess G damit beaufschlagt. Bei G kann es sich um die Regelstrecke oder aber beim Einsatz einer unterlagerten klassischen innerzyklischen Regelung um einen geschlossenen Regelkreis handeln. In diesem Fall ist die Stellgröße u der ILR im Sinne einer Kaskadenregelung oder einer Hilfsregelgröße zu verstehen. Das Lernen kann zudem auch über mehrere vergangene Zyklen erfolgen, worauf hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet wird.

11.2 Systemtheoretische Betrachtung

Um die skizzierte Idee einer ILR mathematisch fassen zu können, wird ein formaler Rahmen benötigt, der eine kompakte Beschreibung der Aufgabenstellung ermöglicht. Hierfür müssen folgende Annahmen bezüglich des zu regelnden Prozesses G getroffen werden.

- (1) Der Prozess ist zyklisch mit einer festen Zykluszeit T_c .
- (2) Die Solltrajektorie w ist im Vorhinein für den Zeitraum $[0, T_c]$ definiert.
- (3) Der Anfangszustand $x_{0,i}$ ist für jeden Zyklus i identisch.
- (4) Die Systemdynamik ändert sich über die Zyklen nicht.
- (5) Für das gegebene w existiert ein u , mit welchem das System zur gewünschten Trajektorie geführt werden kann.
- (6) G ist stabil.

Für fast alle dieser Annahmen gibt es entsprechende Konzepte, die es ermöglichen, diese abzuschwächen oder zu verallgemeinern, von denen einige nur kurz skizziert werden sollen. So fordert (6) nicht die Stabilität der Regelstrecke, sondern nur des Prozesses G , der entsprechend unterlagert stabilisiert werden kann. Für nicht gemäß (5) realisierbare w wird der Regelfehler e_i offensichtlich nie verschwinden, eine Minimierung des Fehlers kann aber dennoch sinnvoll erfolgen. Eine in der Literatur oft synonym zum Begriff der ILR verwendete Bezeichnung spricht von repetitiven Regelungen. Hierunter ist in Abgrenzung zur ILR zu verstehen, dass dort der Anfangszustand des Folgezustandes der Endzustand des vorherigen Zyklus ist: $x_i(0) = x_{i-1}(T_c)$.

Unter den Annahmen (1) bis (6) kann die ILR wie folgt formuliert werden: Gegeben ist die (potentiell nichtlineare und zeitvariante) Strecke in Zustandsraumdarstellung

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad , \quad y = g(x, u, t) \quad , \quad f(\cdot, \cdot, t + T_c) = f(\cdot, \cdot, t) \quad (11.1)$$

und eine vorgegebene Solltrajektorie

$$w_i = \begin{cases} w_c(t) & \text{für } t \in [t_i, t_i + T_c] \\ w_{int}(t) & \text{für } t \in [t_i + T_c, t_{i+1}] . \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (11.2)$$

Dann ist die Iterativ Lernende Regelung ein Lerngesetz Γ mit

$$u_{i+1}(t) = \Gamma(u_i(t), y_i(t), w_i(t)) . \quad (11.3)$$

Zur Veranschaulichung der Solltrajektorie ist der Signalverlauf in Bild 11-2 gezeigt. Die Unterteilung in w_c und w_{int} stellt dabei sicher, das Regelfehler nur für die Zeit während des Zyklus und nicht zwischen den Zyklen betrachtet werden.

Mathematisch gesehen stellt das Lerngesetz Γ eine Fixpunktiteration zur Berechnung der optimalen Stelltrajektorie u^* dar. Das ist dadurch einzusehen, dass aufgrund des für jeden Zyklus gleichen Anfangszu-

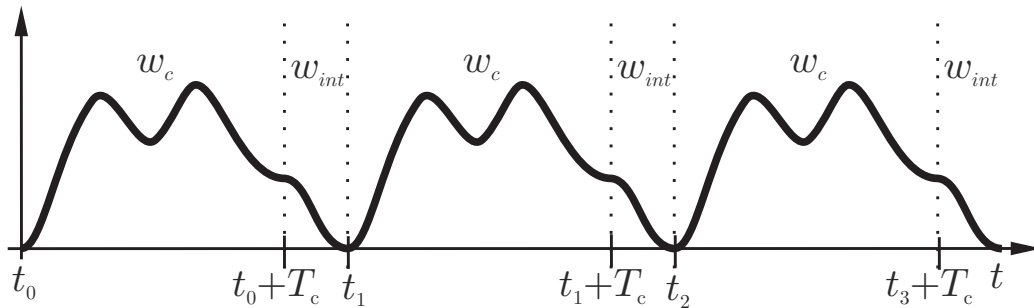


Bild 11-2: Sollverlauf einer iterativ lernenden Regelung

standes und der identischen Systemdynamik in jedem Zyklus der Verlauf von x_i nur abhängig von u_i ist. Daher kann man

$$y_i = g(x_i, u_i, t) = h(u_i) \quad (11.4)$$

für eine Funktion h schreiben. Die Forderung $y_i \stackrel{!}{=} w_i$ soll nun durch ein $u_i = u^*$ erfüllt werden, d.h. $h(u^*) = w$. Die Bestimmung von u^* erfolgt dann im laufenden Betrieb als Grenzwert des Lerngesetzes $u_i \rightarrow u^*$. Diesem mathematischen Hintergrund geschuldet wird im Zusammenhang mit der ILR in der Literatur oft nicht von Stabilität, sondern von Konvergenz gesprochen, da wegen der zeitkontinuierlichen Sichtweise $u(t)$ Folgen von Funktionen betrachtet werden. Man bezeichnet das Lerngesetz Γ als konvergent, sofern

$$|u_k(t) - u_\infty(t)| \rightarrow 0 \quad (11.5)$$

für alle $u_0(t)$ mit einer noch zu definierenden Norm $|\cdot|$ gilt. Hierbei muss nicht zwingend $u_\infty(t) = u^*(t)$ gelten - gegebenenfalls stellt sich eine bleibende Regelabweichung ein. Die Art der verwendeten Norm ist dabei für den Nachweis der Konvergenz entscheidend, da $u(t)$ Element eines Funktionenraums ist und Normen dort nicht äquivalent sind. Aus regelungstechnischer Sicht wird monotone Konvergenz

$$|u_{k+1}(t) - u_\infty(t)| \leq |u_k(t) - u_\infty(t)| \quad (11.6)$$

gefordert, welche eine Verbesserung mit jedem weiteren Lernzyklus impliziert. Die Norm wird dann entsprechend so gewählt, dass sich für das betrachtete System monotone Konvergenz nachweisen lässt. Die Konvergenz des Lerngesetzes bedeutet, sofern diese auch trotz auftretender Störungen erhalten bleibt, die Stabilität der ILR. Hiermit ist die

Stabilität über die Zyklen gemeint, d.h. dass die vorgesteuerte Trajektorie $u_k(t)$ für $k \rightarrow \infty$ auch bei Störungen beschränkt bleibt. Die Stabilität innerhalb eines Zyklus wird durch das Lerngesetz nicht beeinflusst, da die ILR dort als Steuerung agiert.

Da das Hantieren mit Normen und der Konvergenznachweis für den praktischen Entwurf und die Systemanalyse oft zu langwierig ist, ist ein anderer Zugang zur systemtheoretischen Analyse von Stabilität notwendig. Diesen bietet die sogenannte Lifted-System Darstellung, die durch eine zeitdiskrete Betrachtung sich von der Problematik von Folgen von Funktionen lösen kann. Hierbei wird angenommen, dass im Speicher H ohnehin nur zeitdiskret abgetastete Werte hinterlegt werden können. Damit können die gespeicherten Werte $y(k)$ von einer skalaren Größe $\tilde{y}(t)$ eines Zyklus als Vektor zusammengefasst werden, dessen Dimension bei einer äquidistanten Abtastung mit $\Delta t = \frac{T_c}{N}$ genau $N + 1$ entspricht:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [\tilde{y}(t = 0), \tilde{y}(t = \Delta t), \dots, \tilde{y}(t = N\Delta t)]^T \\ &= [y(0), \dots, y(N)]^T \in \mathbb{R}^{N+1} \end{aligned} \quad (11.7)$$

Die Abbildung dieser Werte vom vergangenen Zyklus auf den nächsten Zyklus stellt dann eine zeitdiskrete Abbildung vom \mathbb{R}^{N+1} in den \mathbb{R}^{N+1} dar, die sich mit den Methoden zeitdiskreter Systeme untersuchen lässt. Dieses Vorgehen lässt dabei nur dann Schlüsse auf die Dynamik des zyklischen Systems zu, wenn bei der Abtastung die einschlägigen Kriterien wie das Shannon-Theorem eingehalten werden. Die abgetasteten Folgen repräsentieren dann stückweise konstante Zeitfunktionen, welche durch ein Halteglied 0. Ordnung erzeugt werden. Formuliert man den Prozess G in der Lifted-System Darstellung, so kann man die zeitdiskrete Faltung in Tab. 6-4 in der Form

$$y(k) = g(k) * u(k) = \sum_{j=0}^{\infty} g(k-j) u(j) \quad (11.8)$$

nutzen, um für lineare Prozesse G die algebraische Beschreibung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} g(0) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g(1) & g(0) & 0 & & & \vdots \\ g(2) & g(1) & g(0) & 0 & & \vdots \\ g(3) & g(2) & g(1) & g(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ g(N) & g(N-1) & g(N-2) & \dots & & g(0) \end{bmatrix}}_{=G} \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \\ \vdots \\ u(N) \end{bmatrix}}_u \quad (11.9)$$

zu gewinnen. Die auch als Markov-Parameter bezeichneten Einträge $g_k = g(k)$ der Markov-Matrix G sind dabei die k -ten Werte der zeitdiskreten Impulsantwort. Aufgrund des Kausalitätsprinzips ist G stets eine untere Dreiecksmatrix, da der Ausgang $y(k)$ zum Zeitpunkt k nur von Eingänge $u(j)$ zu Zeitpunkten $j \leq k$ abhängen kann. Die Markov-Matrix enthält die vollständigen dynamischen Informationen des Systems. In analoger Weise bestimmt man eine Beschreibungsform der ILR. Setzt man hier anstelle von Gl.11.3 mit $e_i(t) = w_i(t) - y_i(t)$ das allgemeine lineare, zeitvariante Lerngesetz

$$u_{i+1}(t) = S(t)u_i(t) + \Gamma(t) \left(e_i(t) + \dot{e}_i(t) + \int e_i(t) dt + \dots \right) \quad (11.10)$$

mit Integrationen und Differentiationen beliebiger endlicher Ordnung an, so erhält man die allgemeine Form

$$u_{i+1} = Su_i + \Gamma e_i \quad (11.11)$$

mit der Diagonalmatrix S mit $S_{kk} = S(t = k\Delta t)$ und einer (potentiell) vollbesetzten Matrix Γ . Im Gegensatz zu S ist Γ deshalb nicht diagonal, da auch zeitliche Ableitungen des Fehlers berücksichtigt werden, die in der Approximation als Differenzenquotient zu Einträgen außerhalb der Diagonalen führen. Im Gegensatz zu G hat Γ nicht zwingend eine untere Dreiecksstruktur, da durch Abspeicherung der Signale des letzten Zyklus eine akasale Signalverarbeitung zwischen den Zyklen ermöglicht wird. Der geschlossene Regelkreis kann mit der Lifted-System Darstellung nun in einem Wirkungsplan überführt werden, der in Bild 11-3

gezeigt ist. Hierbei können bei Bedarf noch zusätzliche Elemente F zur Filterung von möglicherweise auftretendem Messrauschen oder V zur Glättung der Referenztrajektorie eingeführt werden.

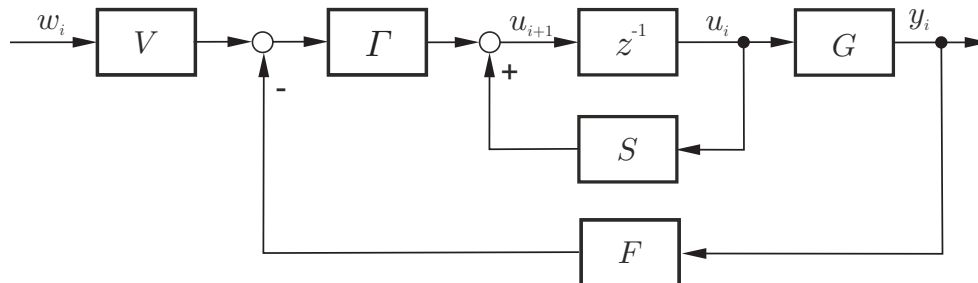


Bild 11-3: Wirkungsplan der ILR in der Lifted-System Darstellung

Ein Vergleich mit der klassischen Zustandsraumdarstellung mit Zustandsrückführung in Bild 8-5 zeigt sofort, dass die Darstellung vollständig analog ist, wenn die Zuordnung

$$\mathbf{A} = -\mathbf{S} \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{\Gamma} \quad , \quad \mathbf{C} = \mathbf{G} \quad , \quad \mathbf{D} = 0 \quad , \quad \mathbf{K} = \mathbf{F} \quad (11.12)$$

und V als Führungsgrößenfilter vorgenommen wird. Damit lässt sich auch sofort das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises als

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{S} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{G}) \quad (11.13)$$

angeben. Sofern keine Pol-Nullstellen-Kürzungen auftreten, lässt sich hieraus direkt die Stabilität der ILR bestimmen, da für alle λ aufgrund der zeitdiskreten Dynamik von Zyklus zu Zyklus für Stabilität offensichtlich $|\lambda| < 1$ gelten muss. Dieses Kriterium ist mit den bekannten mathematischen Werkzeugen leicht zu überprüfen und stellt den üblichen Zugang zur Stabilitätsuntersuchung und Auslegung für Iterativ Lernende Regelungen dar. Zu beachten ist auch hier, dass die Stabilität der Abbildung $\mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{u}_{i+1}$ untersucht wird, was nur im Falle eines stabilen Prozesses G die Stabilität des Gesamtregelkreises zur Folge hat.

Zur Überprüfung der Voraussetzung dieser Bedingung muss nachgerechnet werden, ob möglicherweise Nullstellen die Polstellen kompen-

sieren. Die Nullstellen des Führungsverhaltens können dabei gemäß [19] über die Formel

$$\det(\mathbf{G}) \cdot \det(\mathbf{V}) = 0 \quad (11.14)$$

bestimmt werden. Da \mathbf{V} frei wählbar ist, kann $\det(\mathbf{V}) \neq 0$ beim Entwurf sichergestellt werden. Insbesondere ist die Bedingung beim Verzicht auf ein Führungsgrößenfilter $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ erfüllt. Aufgrund der unteren Dreiecksstruktur kann die Determinante von \mathbf{G} sofort zu

$$\det(\mathbf{G}) = (g(0))^{N+1} \quad (11.15)$$

berechnet werden. Folglich gilt, dass das Führungsverhalten für zeitdiskrete Systeme G mit Durchgriff (d.h. $g(0) \neq 0$) keine, ansonsten $N + 1$ -Nullstellen bei $z = 0$ aufweist. Diese Fälle sind für die Stabilität unproblematisch.

Neben der Stabilität lassen sich in diesem Rahmen Steuer- und Beobachtbarkeit untersuchen. Die entsprechenden Kriterien nach Kalman erbringen dabei die Bedingungen, dass die Matrizen

$$\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{S}\mathbf{\Gamma} & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}\mathbf{S} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

vollen Rang besitzen. Die Steuerbarkeit lässt sich durch den frei wählbaren Lernoperator $\mathbf{\Gamma}$ sicherstellen, während Beobachtbarkeit genau nur für Systeme mit Durchgriff gegeben ist. Da die Abbildung $\mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{u}_{i+1}$ analysiert wird, bedeutet das, dass bei geeigneten Lernoperatoren $\mathbf{\Gamma}$ der Verlauf von \mathbf{u}_i vorgegeben werden kann, was aus der Anschauung leicht verifiziert werden kann. Die Beobachtbarkeit wiederum bedeutet, dass sich aus der Messung des Ausgangs \mathbf{y}_i der Eingang \mathbf{u}_i bestimmen lässt. Diese Beobachtung von \mathbf{u}_i ist technisch nicht notwendig, da \mathbf{u}_i ohnehin bekannt ist. Dennoch hat die fehlende Beobachtung eine Relevanz, da sie impliziert, dass Anteile des Stellvektors \mathbf{u}_i sich nicht am Ausgang \mathbf{y}_i bemerkbar machen. Dies kann für Systeme ohne Durchgriff leicht verifiziert werden, da offensichtlich der letzte Stelleingriff $u(N)$ keine Auswirkungen auf \mathbf{y}_i haben kann.

11.3 Entwurf des Lernoperators

Die Lifted-System Darstellung bietet nun einen passenden Rahmen, um die beiden Lernoperatoren \mathbf{S} und $\mathbf{\Gamma}$ zu entwerfen. Der Operator \mathbf{S} definiert dabei gemäß Gl.11.11, welcher Anteil der Stelltrajektorie des letzten Zyklus in den nächsten Zyklus a priori (d.h. ohne Betrachtung der entstandenen Fehler \mathbf{e}_i) übernommen werden soll. Folglich stellt ein Wert von $S_{kk} = 1$ ein vollständiges Beibehalten dar, während Werte kleiner eins als Vergessensfaktor interpretierbar sind. Werte außerhalb des Intervalls $[0, 1]$ sind aus der Anschauung offensichtlich nicht für ein effizientes Lernen geeignet. Eine geschickte Wahl von \mathbf{S} kann hingegen stationäre Genauigkeit im Regelkreis sicherstellen. Unter der Annahme eines stabilen Betriebs der ILR ist bekannt, dass der geschlossene Regelkreis dann stationär genau arbeitet, sofern der aufgeschnittene Regelkreis integrierendes Verhalten aufweist. Die Analogie der Zustandsraumdarstellung zeigt, dass die Rolle von \mathbf{A} als aufgeschnittenem Regelkreis durch \mathbf{S} ersetzt wird. Daher ist es sinnvoll, möglichst viele Eigenwerte von \mathbf{S} zu eins zu setzen. Da \mathbf{S} eine Diagonalmatrix ist, ist eine naheliegende Wahl $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ mit $N + 1$ Eigenwerte bei eins.

Die Betrachtung des Lernoperators $\mathbf{\Gamma}$ ist komplexer, da dieser potentiell voll besetzt ist, was bis zu $(N + 1)^2$ Einstellparameter erlaubt. Zentrale Bedingung hierbei ist die Stabilität der ILR gemäß Gl.11.13. Unter der Vereinfachung von $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ müssen also die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{\Gamma G} - \mathbf{S}$ passend gewählt werden. Um eine aufwändige Berechnung der Eigenwerte zu umgehen, bietet es sich an dieser Stelle an, die Diagonalstruktur von \mathbf{S} sowie die untere Dreiecksstruktur von \mathbf{G} so zu nutzen, dass diese Eigenwerte direkt abgelesen werden können. Hierzu sei $r = n - m$ der Differenzgrad von Nenner und Zähler der Z-Übertragungsfunktion $G(z)$ von $g(k)$ (siehe auch Gl.6.68) der sogenannte relative Grad von G . Mithilfe der Grenzwertsätze lässt sich schnell einsehen, dass ebenfalls

$$g(k) = 0 \text{ für } k < r \quad \text{und} \quad g(r) \neq 0 \quad (11.17)$$

gilt. Folglich entspricht der relative Grad für zeitdiskrete Systeme dem Zeitindex r , für den der Eingang $u_i(0)$ erstmalig auf den Ausgang $y_i(k)$ wirkt und damit der Totzeit. Für Systeme mit Durchgriff gilt $r = 0$. Die

Markov-Matrix ist dann eine untere Dreiecksmatrix, die auf der r -ten Nebendiagonalen beginnt. Man definiert nun

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(-1) & \dots & \gamma(-r) & 0 & \dots & 0 \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(-1) & & \gamma(-r) & 0 & \vdots \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(-1) & & & \vdots \\ \gamma(3) & \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \gamma(-1) \\ \gamma(N) & \gamma(N-1) & \gamma(N-2) & \dots & & & \gamma(0) \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

als eine untere Dreiecksmatrix, die bei der $-r$ -ten Nebendiagonalen beginnt. Einfaches Ausmultiplizieren zeigt, dass ΓG ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix mit der Diagonalen

$$(\Gamma G)_{ii} = \gamma(-r)g(r) \quad \text{für } i < N + 1 - r \quad \text{und } (\Gamma G)_{ii} = 0 \quad \text{sonst} \quad (11.19)$$

ist. Folglich ergeben sich die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei einer Wahl von S mit

$$S_{ii} = \tilde{s} \quad \text{für } i < N + 1 - r \quad \text{und } S_{ii} = 0 \quad \text{sonst} \quad (11.20)$$

als einen $N + 1 - r$ -fachen Pol bei $z = \tilde{s} - \gamma(-r)g(r)$ und einem r -fachen Pol bei $z = 0$. Dieser r -fache Pol bei Null entspricht genau den Einträgen im Stellvektor \mathbf{u} die gemäß der Beobachtbarkeitsanalyse keinen Einfluss auf den Ausgangsvektor \mathbf{y} haben. Hier ist es notwendig, von der Vorgabe $S = 1$ abzuweichen, da ohne Fehlerrückführung durch Γ gelernt wird und ein Wert von $S = 1$ die letzten r Pole an den Stabilitätsrand verschiebt. Offenbar hängt die Stabilität der ILR nur von dem Lernparameter $\gamma(-r)$ und dem ersten von Null verschiedenen Markov-Parameter $g(r)$ ab. Üblicherweise wird nun $\gamma(-r)$ über eine Polvorgabe festgelegt und Stabilitätsgrenzen für $\gamma(-r)$ können direkt angegeben werden.

Die Tatsache, dass bei der Struktur der Lernmatrix in Gl.11.18 allein $\gamma(-r)$ die Stabilitätseigenschaften festlegt, ermöglicht es, die Lernoperatoren stark zu vereinfachen. Für den Fall $r = 0$ ist es möglich, $\Gamma = \gamma_P I$

als Vielfaches der Einheitsmatrix zu wählen. Diese Variante der ILR wird auch als P-ILR bezeichnet, da sie zurückübersetzt in die zeitkontinuierlichen Betrachtung genau dem Lerngesetz

$$\mathbf{u}_{i+1}(t) = S\mathbf{u}_i(t) + \gamma_P (e_i(t)) \quad (11.21)$$

und damit einem P-Regler entspricht. Analog entwickelt man Bezeichnungen wie D-ILR und PD-ILR, wobei letztere in der allgemeinen Struktur

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_P & \gamma_D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_P & \gamma_D & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & \gamma_D \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_P \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

geschrieben wird und für einen relativen Grad von $r = 1$ geeignet ist. Diese vereinfachten Lernoperatoren erfüllen auch die formulierten Steuerbarkeitsanforderungen – höchstens die letzten r Stellgrößen fallen hier erneut weg.

Eine offene Frage bleibt nun, ob neben der Vereinfachung des Lernoperators auf bis zu eine einzige Nebendiagonale es auch möglich ist, die Freiheitsgrade der weiteren $\gamma(i)$ gewinnbringend zu nutzen. Zur Analyse ist es hier zielführend, sich erneut der zeitdiskreten Faltung zu bedienen. Die Gleichung $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \mathbf{\Gamma} (\mathbf{w}_i - \mathbf{y}_i)$ lässt sich dann als

$$\mathbf{u}_{i+1}(k) = \mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=0}^{k+r} \gamma(k-j) (\mathbf{w}_i(j) - \mathbf{y}_i(j)) \quad (11.23)$$

schreiben. Setzt man Gl.11.23 in Gl.11.8 ein, so erhält man komponentenweise

$$y_{i+1}(k) = \sum_{j=0}^k g(k-j) \left(u_i(j) + \sum_{l=0}^{j+r} \gamma(j-l) (w_i(l) - y_i(l)) \right). \quad (11.24)$$

Folglich sind die verschiedenen $\gamma(k)$ beim iterativen Lernen miteinander gekoppelt, d.h. ein schlechtes Lernverhalten des k -ten Zeitschrittes

wirkt sich möglicherweise auch negativ auf die anderen Zeitschritte aus. Dies kann man verhindern, indem man Gl.11.24 entfaltet und fordert, dass $y_{i+1}(k) = f(y_i(l))$ nur für $k = l$ gilt. Hierdurch wird das Lernverhalten der einzelnen Zeitschritte voneinander entkoppelt. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem in den Koeffizienten $y(j-l)$, dessen Lösung sich komponentenweise und rekursiv angeben lässt:

$$y(i) = -\frac{1}{g(r)} \sum_{j=-r}^{i-1} y(j) g(i+r-j) \quad (11.25)$$

Hier ist r der relative Grad und $y(-r)$ wird beispielsweise über eine Polvorgabe festgelegt. Dieser Entwurf wird auch als Entfaltungs-ILR bezeichnet.

11.4 Normoptimale ILR

Eine alternative Berechnung und Auslegung der ILR kann durch die sogenannten Normoptimale ILR erfolgen. Bei dieser wird in Analogie zur Modellbasierten Prädiktiven Regelung in Abschnitt 10 die Stelltrajektorie über die Optimierung einer Kostenfunktion ermittelt. Ein klassischer Kandidat für die Kostenfunktion ist dabei

$$\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{y}_{i+1}\|_Q^2 = \|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{G}\mathbf{u}_{i+1}\|_Q^2 = \|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{y}_i - \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_{i+1}\|_Q^2 \quad (11.26)$$

mit $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_{i+1}$. Das Systemwissen wird durch die Markov-Matrix \mathbf{G} eingebracht. Die Praxis zeigt hierbei, dass die volle Applizierung von $\Delta\mathbf{u}_{i+1}$ aufgrund von Abweichungen von Modell und Regelstrecke zu schwingendem oder instabilen Verhalten führen kann. Daher verwendet man das Stellgesetz

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \eta\Delta\mathbf{u}_{i+1}. \quad (11.27)$$

Durch den Verstärkungsfaktor $\eta \in [0, 1]$ kann das Konvergenzverhalten eingestellt werden, wobei $\eta = 1$ vollständigem Lernen entspricht, während eine Verringerung von η die Robustheitseigenschaften der ILR verbessert. Entscheidender Vorteil der Normoptimale ILR ist analog zur MPR die Möglichkeit, Beschränkungen beim Lernen explizit zu berücksichtigen.