und für den Beobachter

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{L} \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{C} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}) \quad . \tag{9.91}$$

Subtrahiert man Gl.(9.91) von Gl.(9.90), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} &= \boldsymbol{A} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}} \quad . \end{aligned} \tag{9.92}$$

Mit

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{C} \tag{9.93}$$

geht Gl.(9.92) über in die (homogene) Gleichung

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}} \tag{9.94}$$

und hat damit als Lösung

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = e^{\boldsymbol{F} \cdot t} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}(0) \quad . \tag{9.95}$$

Wenn also die Matrix $\boldsymbol{F}$ so gewählt wird, dass der durch Gl.(9.95) beschriebene Einschwingvorgang stabil ist und genügend rasch abläuft, und danach die Matrix $\boldsymbol{L}$ gemäß Gl.(9.93) dimensioniert wird, nähert der Zustandsvektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ des Beobachters den Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$ des Systems mit wachsender Zeit immer besser an, auch wenn die Anfangszustände von System und Beobachter voneinander verschieden waren und auch wenn die Eingangsgrößen $\boldsymbol{u}$ sich beliebig ändern.

9.7 Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung

Analog zu der Übertragung einer zeitkontinuierlichen Differentialgleichung in die Form einer zeitdiskreten Differenzengleichung, lässt sich eine zeitkontinuierliche Zustandsraumbeschreibung in eine zeitdiskrete überführen. Die zeitdiskrete Form der Zustandsraumdarstellung wird vor allem bei der Abtastregelung kontinuierlicher Regelstrecken und zur digitalen Simulation kontinuierlicher Systeme eingesetzt.

Ausgehend von der Lösung der kontinuierlichen Zustandsdifferentialgleichung, Gl.(9.49)

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad t > t_0 \tag{9.49}$$